Ueber die

Monoyer'schen dioptrischen Cardinalpunkte eines Systems centrirter brechender sphärischer Flächen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

hohen philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Christian Drews
aus Röbel.

München.
Druck von R. Oldenbourg.
1889.

Ueber die

Monoyer'schen dioptrischen Cardinalpunkte eines Systems centrirter brechender sphärischer Flächen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

hohen philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Christian Drews
aus Röbel.

München.
Druck von R. Oldenbourg.
1889.

Referent: **Prof. Dr. Matthiessen.**

Herrn Professor **Dr. L. Matthiessen,**

dem hochverdienten Forscher und Schriftsteller auf dem Gebiete der Dioptrik

dem hochverehrten Lehrer

voll Dankbarkeit

gewidmet.

Erster Theil.

Den allgemeinsten Fall der paraxialen Dioptrik für paraxiale Objecte centrirter Kugelflächen, wenn nämlich die absoluten Brechungsexponenten des ersten und letzten Mediums verschiedene Werthe haben, z. B. beim menschlichen Auge hat Gauss in „Dioptrische Untersuchungen, Göttingen (1840)“ vom rein analytischen Standpunkte aus behandelt und vollkommen gelöst. Der grosse Mathematiker hat unter Zugrundelegung der Hauptpunkte und der Brennpunkte die Brennweiten des Systems exact ausgedrückt, aus welchen Stücken sich alle conjugirten Punkte berechnen lassen.

Da nach dem ersten Satze des Brechungsgesetzes jeder in einem Axenschnitte der brechenden Fläche eintretende Lichtstrahl mit dem austretenden (conjugirten) Strahle in derselben Ebene liegt, so wird jeder ebenen Figur, wenn sie im Axenschnitte liegt, eine conjugirte ebene Figur entsprechen; das Verhältnis homologer Dimensionen beider Figuren nennt man das Verhältnis der Bildgrössen. Dieses Verhältnis wird analytisch dargestellt durch die Gleichung

$$\frac{y_0}{y_1} = \frac{f - x_0}{f} = \frac{\varphi}{\varphi - x_1} = \frac{x_0 - (f - \varphi)}{x_1 - (f - \varphi)} = -\frac{\varphi x_0}{f x_1} \qquad (1$$

Ausser der Kenntnis dieses Verhältnisses (Ordinatengleichung) ist noch nöthig die Abscissen von Object und Bildpunkt zu kennen (Abscissengleichung). Für die beiden Hauptpunkte in der Axe $H_\alpha H_\beta$ lautet die Abcissengleichung

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1 \qquad (2$$

In diesen beiden Gleichungen bedeuten, vergl. Fig. 1:

y_0, y_1 die Ordinaten des Object-, Bildpunktes;

f, φ die beiden Hauptbrennweiten;

x_0, x_1 die Object-, Bildweite.

Die Abscissengleichung 2 hat das characteristische, dass sie stets dieselbe Form behält, wenn man die Abscisse t_0 irgend eines

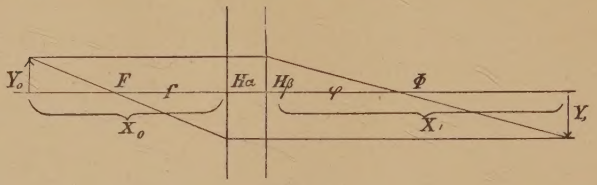

Fig. 1.

leuchtenden axialen oder paraxialen Punktes P_0 von einem festen Punkte T_0 an rechnet und die Abscisse t_1 des conjugirten Bildpunktes P_1 von einem festen Punkte T_1 an rechnet, wofern T_0 und T_1 conjugirte Punkte auf der Centralen sind. Für neue Punkte dieser Art wird also die Abscissengleichung 2

$$\frac{f - x_0}{t_0} + \frac{\varphi - x_1}{t_1} = 1 \text{ (vergl. Fig. 2)} \qquad (3$$

Dergleichen bipolare Abscissenanfangspunkte nennt man Cardinalpunkte des Systems von brechenden Flächen. Statt zweier conjugirter

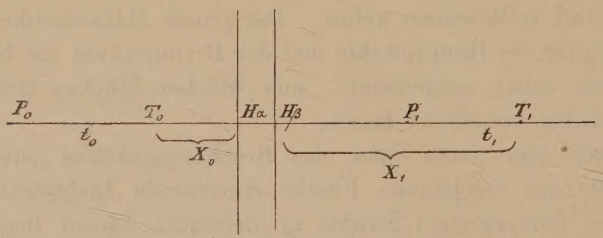

Fig. 2.

Punkte kann man auch die beiden Hauptbrennpunkte F und Φ als Cardinalpunkte wählen: man erhält Brennpunktscoordinaten und die Brennpunktsgleichung

$$f\varphi = \xi_0 \xi_1. \qquad (4$$

Von den conjugirten Punkten auf der Axe des Systems haben sich nun mehrere als besonders wichtig und werthvoll gezeigt, weil mit ihrer Hilfe die dioptrischen Formeln für den Durchgang eines Lichtstrahles durch ein System brechender Flächen vereinfacht werden, und weil auch einfache geometrische Constructionen des Bildes dadurch möglich sind (Fig. 3). Gauss[1]) hat die Hauptpunkte eingeführt,

1) Dioptrische Untersuchungen. Göttingen (1840).

Listing[1]) hat die Knotenpunkte (K_α, K_β) als Cardinalpunkte eingeführt in der Entfernung $r = f + \varphi$ von H_α und H_β.

Listing, Grunert und Töpler[2]) haben die negativen Hauptpunkte (G_α, G_β) und die negativen Knotenpunkte (L_α, L_β) hinzugefügt. Dabei zeigte sich, dass G_α, G_β symmetrisch zu K_α K_β und L_α, L_β symmetrisch zu H_α, H_β liegen; ähnlich also wie K_α, K_β mit H_α, H_β symmetrisch gegen F, Φ liegt. Zwischen diesen Haupt- und Knotenpunkten sind von Hällstén[3]) noch zwei neue Punktepaare,

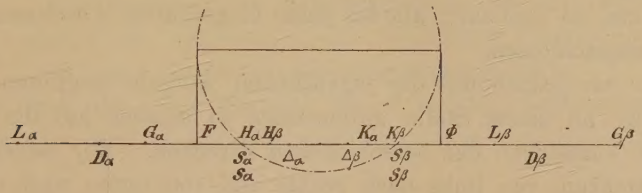

Fig. 3.

die inneren (Δ_α, Δ_β) und die äusseren (D_α, D_β) dioptrischen Punkte eingeführt und zwar die inneren zwischen bezüglich H_α, H_β und K_α, K_β, die äusseren zwischen L_α, G_α und L_β, G_β. Nimmt man nun die Symptosen von Listing (S_α, S_α und S_β, S_β) hinzu, welche im speciellen Falle allerdings in einen Punkt S_α (H_α, H_β) und S_β (K_α, K_β) zusammenfallen, so erhält man nach Matthiessen[4]) im ganzen zwanzig Cardinalpunkte, welche mit Ausnahme der symptosischen Punkte das gemeinsame Characteristicum haben, dass sie in geometrisch bestimmbarer Weise zu den Hauptbrennpunkten auf der Centralen liegen. Alle diese Punkte liegen symmetrisch zum Centrum von H_β, K_α und die Projection des Mittelpunktes des sogenannten Hällstén'schen Kreises auf die Axe fällt in die Mitte von H_β, K_α. In denselben Punkt fallen im speciellen Falle auch die beiden Symptosen.

Zu diesen zwanzig Cardinalpunkten hat nun Monoyer[5]) zwei neue Punktepaare hinzugefügt, die confocalen Punkte und die Augenpunkte. Confocale Punkte sind die conjugirten Punkte des ersten

1) Ueber einige merkwürdige Punkte in Linsen und Linsensystemen. Poggendorff's Annalen. Bd. 129 (1866).

2) S. Matthiessen, die Prioritätsansprüche deutscher Physiker auf die Entdeckung der Cardinalpunkte. Centralzeit. f. Opt. u. Mech. (1885.)

3) Monoyer Cap. 6 S. 72 führt diese Punkte als äquidistante und antiäquidistante Fundamentalpunkte ein.

4) Matthiessen, Die zwanzig Cardinalpunkte des menschlichen Auges. Klinische Monatsbl. f. Augenheilk. (1882) und „Beiträge zur Dioptrik der Krystalllinse" Berlin-Eversbusch's Zeitschr. f. vergl. Augenheilk. Bd. 4 (1887).

5) Monoyer, Allgemeine Theorie centrirter dioptrischer Systeme. Exner's Repert. der Physik Bd. 21 (1885)

Brennpunktes F_1 der ersten Fläche, C_α und des zweiten Brennpunktes Φ_α der letzten Fläche, C_β; die Augenpunkte sind die conjugirten Punkte A_α und A_β des Scheitels der ersten Fläche S_1 und der letzten Fläche S_α selber.

In dieser Arbeit sollen nun die Monoyer'schen Cardinalpunkte näher erörtert, die innige Beziehung zwischen den von Monoyer aufgestellten Symbolen und der Interstitialdeterminante von Matthiessen aufgedeckt und die Wichtigkeit der neuen Cardinalpunkte für afocale Systeme dargethan werden, denn fehlen in einem System die Hauptbrennpunkte, so sind auch alle bis dahin eingeführten Abscissenanfangspunkte ausgeschlossen.

Bevor wir jedoch mit der eigentlichen Aufgabe beginnen, ist es nothwendig, an dieser Stelle aufmerksam zu machen auf die Bestimmung der Vorzeichen der verschiedenen Strecken. Wir setzen fest:

1. Strecken, von links nach rechts und von unten nach oben gemessen, sind mit dem positiven Vorzeichen in Rechnung zu setzen, umgekehrt gemessene Strecken mit dem negativen Vorzeichen;

2. der Radius einer brechenden Fläche ist positiv, wenn die Fläche convex zur Richtung des eintretenden Strahles ist.

Diese Festsetzung erscheint uns als die natürlichste, dem vorgelegten rechtwinkligen Coordinatensysteme entsprechend, und als die einfachste, weil sie eine konsequente Durchführung gestattet. Dagegen zeigt die Bestimmung der Vorzeichen in den Schriften von Monoyer und auch die früheren z. B. Listing eine grosse Willkür und Inconsequenz[1]). Unsere Festsetzung findet sich ausser in den Schriften von Matthiessen nur noch bei C. Neumann[2]), Angelo Batelli und Gauss.

§ 1.

Die Monoyer'schen Fundamentalgleichungen.

Während die Abscissen- und Ordinatengleichungen für Object und Bild bezüglich der schon früher bekannten Cardinalpunkte einfache Beziehungen zu den Hauptbrennweiten des Systems aufweisen, wie die Gleichungen 1 bis 4 sofort erkennen lassen, gestalten sich die Verhältnisse für diese neuen Cardinalpunkte wesentlich einfacher, wenn wir sie beziehen auf den partiellen vorderen Brennpunkt F_1 der ersten Fläche S_1, resp. auf den partiellen hintern Brennpunkt Φ_α der letzten

1) Monoyer sieht die convergente (Sammel-)Linse so an, als hätte sie negative Brennweiten, während Listing beide Brennweiten eines Collectivsystems positiv nimmt.

2) C. Neumann, Ber. d. Sächs. Ges. d. Wiss. Math.-phys. Kl. (1880) S. 53.

Fläche S_a. Daher nennen wir die letzteren Punkte primitive Abscissenanfangspunkte.

Seien nun (Fig. 4) f_k und φ_k die beiden Brennweiten des $k$ten Diopters des brechenden Systemes von a-Flächen;

J_k das $k$te secundäre Focalinterstitium[1])
$= f_k - \varphi_k + d_k$, dabei d_k der Abstand auf der Axe der $k+1$ ten Fläche von der $k$ten;

s_{2k-2} und s_{2k-1} die Abscissen zweier conjugirter Punkte auf der Axe bezüglich des Scheitelpunktes der $k$ten Fläche;

s und s' die Abscissen zweier conjugirter Punkte der Axe bezüglich der primitiven Abscissenanfangspunkte,

dann lässt sich s als Function von s' und den Constanten des Systems ausdrücken und umgekehrt s' als Function von s durch Elimination

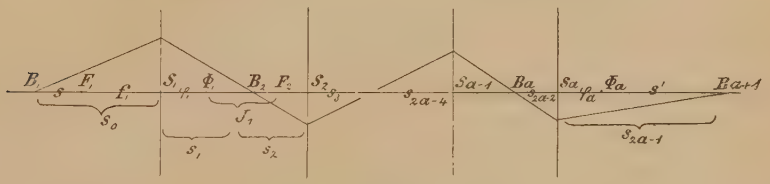

Fig. 4.

der partiellen Abscissen, je nachdem wir den Lichtstrahl durch das System verfolgen, von B_1 bis B_{a+1} oder umgekehrt vermöge der Gleichungen

$$\frac{f_k}{s_{2k-2}} + \frac{\varphi_k}{s_{2k-1}} = 1 \qquad (2')$$

oder da

$$s_{2k-1} = s_{2k} + d_k \qquad (2a)$$

$$s_{2k-2} = f_k + \frac{f_k \varphi_k}{d_k - \varphi_k + s_{2k}}$$

und für das letzte Diopter

$$s_{2a-2} = f_a + \frac{f_a \varphi_a}{-\varphi_a + s_{2a-1}}$$

so dass wir erhalten s_0 dargestellt als Function von s_{2a-1} in der Form eines Kettenbruches; und dann sofort[2])

---

1) Wir folgen der Bezeichnung und Benennung von Matthiessen, zuerst veröffentlicht in Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. 29 S. 343 (1884). Diese dioptrische Strecke ist zuerst von Matthiessen im Grundriss der Dioptrik (1877) § 24 eingeführt und 1880 von Ferraris für Linsensysteme in Luft mit einem besonderen Buchstaben D_{k+1} bezeichnet worden.

2) Vergl. Matthiessen, Grundriss der Dioptrik (1877) § 24, wo nach dieser Methode die Brennweiten $S_1 F$ u. $\Sigma_1 \Phi$ in den Formeln 49 u. 50 berechnet sind.

$$F_1 B_1 = s = f_1 \varphi_1 \sqrt{J_1} + f_2 \varphi_2 \sqrt{J_2} + \ldots + f_a \varphi_a \sqrt{J_a} \qquad (5$$

und

$$\Phi_a B_{a+1} = s' = -f_a \varphi_a \sqrt{J_{a-1}} + f_{a-} \sqrt[1]{\varphi_{a-1}} \sqrt{J_{a-2}} + \ldots + f_2 \varphi_2 \sqrt{J_1} - f_1 \varphi_1 \sqrt{s}. \qquad (6$$

Diese Gleichungen können dargestellt werden in der Form

$$f_1 \varphi_1 A' s' + f_1 \varphi_1 f_n \varphi_n C' = f_n \varphi_n B' s + D s s' \qquad (7$$

Denn führen wir die Rechnung aus, etwa bis zu einem System von fünf Dioptern, so ergibt sich schon das Bildungsgesetz für diese Constanten A' B' C' D' für drei aufeinander folgende Reductionen

$$\left.\begin{aligned} A'_{n+1} &= J_n A'_n + f_n \varphi_n A'_{n-1} \\ B'_{n+1} &= J_{n-1} B'_n + f_{n-1} \varphi_{n-1} B'_{n-1} \\ C'_{n+1} &= J_{n-1} C'_n + f_{n-1} \varphi_{n-1} C'_{n-1} \\ D_{n+1} &= J_n D_n + f_n \varphi_n D_{n-1} \end{aligned}\right\} \qquad (8$$

aus den berechneten Werthen

$$\left.\begin{aligned} &D_1 = 0; \quad B'_1 = 0; \quad A'_1 = 0; \quad C'_1 = 0; \\ &D_2 = J_1; \quad B'_2 = 1; \quad A'_2 = 1; \quad C'_2 = 0; \\ &D_3 = J_1 J_2 J_3 f_2 \varphi_2; \quad B'_3 = J_1; \quad A'_3 = J_2; \quad C'_3 = 1; \\ &D_4 = J_1 J_2 J_3 + f_2 \varphi_2 J_3 + f_3 \varphi_3 J_1; \quad B'_4 = J_1 J_2 + f_2 \varphi_2; \\ &\qquad A'_4 = J_2 J_3 + f_3 \varphi_3; \quad C'_4 = J_2; \\ &D_5 = J_1 J_2 J_3 J_4 + J_1 J_2 f_4 \varphi_4 + J_1 f_3 \varphi_3 J_4 + f_2 \varphi_2 J_3 J_4 + f_2 \varphi_2; \\ &B'_5 = J_1 J_2 J_3 + J_1 f_3 \varphi_3 + f_2 \varphi_2 J_3; \\ &A'_5 = J_2 J_3 J_4 + J_2 f_4 \varphi_4 + f_3 \varphi_3 J_4; \quad C'_5 = J_2 J_3 + f_3 \varphi_3. \end{aligned}\right\} \qquad (8a$$

Diese Werthe gestatten sofort folgende Beziehung zwischen den Coefficienten hinzuschreiben

$$A'_{n+1} = D_{n(+1)}; \quad B'_{n+1} = D_n; \quad C'_{n+1} = D_{n-1(+1)} \qquad (9$$

dabei bezieht sich $(+1)$ auf die in den Coefficienten enthaltenen Grössen J und $f\varphi$. A', B', C', D sind wesentlich positiv. Um nun die Beziehung zwischen s und s' für eine beliebige Anzahl von Dioptern herstellen zu können, genügt es, diese primitive Gleichung 7 zu bilden, oder schliesslich nach Gl. 9 den Werth des Coefficienten D anzugeben als Kettenbruchreduction. Durch weitere formale Abkürzung der in das Resultat eintretenden Ausdrücke kann Gl. 7 noch weiter vereinfacht werden; setzen wir nämlich

Bemerkung. Die in Bezug auf die Vorzeichen von (5) an auftretende Abweichung von den entsprechenden Ausdrücken bei Monoyer, z. B. (5), (6), (7), entsprechend I, I^a, II, macht sich durch die ganze Arbeit bemerkbar und rührt her von der verschiedenen Bestimmung der Vorzeichen der partiellen Brennweiten und der dioptrischen Strecken überhaupt.

$$\left.\begin{aligned} \frac{f_1 \varphi_1 A'}{D} = \frac{A}{D} = a; \quad \frac{f_n \varphi_n B'}{D} = \frac{B}{D} = b; \\ \frac{f_1 \varphi_1 f_n \varphi_n C'}{D} = \frac{C}{D} = c, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

so lässt sich die Fundamentalgleichung der Abscissen schreiben

$$a \cdot s' + c = b \cdot s + s \cdot s' \tag{11}$$

Ebenso[1]) elementar lässt sich aus Gl. 1 die Fundamentalgleichung der Ordinaten conjugirter Punkte bezüglich der primitiven Abscissenanfangspunkte darstellen, indem wir setzen

$$s_0 - f_1 = s; \quad -\varphi_a + s_{2a-1} = s';$$

dann folgt

$$\frac{Y_a}{Y_0} = \frac{\overset{a}{J_1^k} l f_k}{\overset{a}{J_1^k} l \,(f_k - s_{2k-2})}; \tag{12}$$

$$\frac{Y_a}{Y_0} = \frac{\overset{a}{J_1^k} l \,(\varphi_k - s_{2k-1})}{\overset{a}{J_1^k} l \,\varphi_k}. \tag{13}$$

In Gl. 12 und 13 sind die Nenner immer positiv; die Zähler sind nur für eine gerade Anzahl von a wesentlich positive Grössen. Aus diesen beiden Productdarstellungen der Grössenverhältnisse der Ordinaten können wir genau so, wie bei der Ableitung des Werthes $F_1 B_1 = s$, alle Zwischenabscissen eliminiren und erhalten allgemein

$$\frac{Y_a}{Y_0} = \frac{\overset{a}{J_1^k} l f_k}{A - Ds'} \tag{14}$$

$$\frac{Y_a}{Y_0} = \frac{[B + Ds'](-1)^a}{\overset{a}{J_1^k} l \varphi_k}. \tag{15}$$

Für $a = 1$ wird nach Gl. 14 und Gl. 15

$$\frac{Y_1}{Y_0} = \frac{f_1}{-s} = \frac{-f_1}{s_0 - f_1}; \quad \frac{Y_1}{Y_0} = \frac{-s'}{\varphi_1} = \frac{\varphi_1 - s_1}{\varphi_1}.$$

Dabei sind die Zähler, wenn a gerade ist, als wesentlich mit dem positiven Vorzeichen versehen zu erachten, die Nenner sind stets positiv; die conjugirten Ordinaten sind dann also homothetisch, im entgegengesetzten Falle, wenn a also ungerade ist, antithetisch.

Die Fundamentalgleichungen von Monoyer Gl. 7, 11 und Gl. 14, 15 haben eine einfache Form, aber die Beziehungen und Bezeichnungen in Gl. 9, die Darstellung des Zusammenhanges der Grössen A' B' C' mit D, synthetisch auf einem unstrengen, unwissenschaftlichen Wege gefunden, müssen den Eindruck grösster Willkür

1) Vergl. Matthiessen, Grundriss der Dioptrik. § 28.

machen, und auch die Berechnung dieser vier Grössen nach der Methode von Monoyer ist recht schwerfällig und umständlich.

Um nun den thatsächlich bestehenden innigen Zusammenhang der Grössen A' B' C' mit D aufzudecken, und zugleich als eine Weiterführung der Monoyer'schen Arbeit mögen zunächst aus diesen Fundamentalgleichungen die Coordinatengleichungen für Object und Bild bezüglich der confocalen und Augenpunkte abgeleitet werden; dabei ist ein Nachdruck darauf gelegt die dioptrischen Strecken und Punkte geometrisch genau auf der Axe zu fixiren und ebenfalls die Constanten der resultirenden Gleichungen geometrisch zu interpretiren, ein Umstand, den Monoyer gar nicht beachtet.

§ 2.

Coordinatengleichungen für Object und Bild bezüglich der neuen Kardinalpunkte und zwar

I. bezüglich der confocalen Punkte.

Sechs Paare von Cardinalpunkten, nämlich die positiven und negativen Haupt- und Knotenpunkte, sowie die äusseren und inneren dioptrischen Punkte, lassen sich in Beziehung bringen zu den beiden Hauptbrennpunkten des Systems, so dass man die Lage dieser Punkte auf der Axe sofort angeben kann. Die Abscissengleichung der auf sie bezogenen conjugirten Punkte der Axe erhält man, wenn man ihre Hauptabscissen in Gleichung 3 einsetzt, respective für x_0 und x_1; denn diese sechs Punktepaare sind wechselseitig conjugirte Punkte. Anders stellen sich ausser den Brennpunkten und symptosischen Punkten die confocalen und die Augenpunkte. Deren Lage auf der Axe zu den Hauptpunkten, welche erforderlich ist zur Aufstellung der Coordinatengleichungen, wollen wir jetzt bestimmen.

a) Die Abscissengleichung.

Es lassen sich leicht Beziehungen aufstellen zwischen den Coefficienten der fundamentalen Gleichungen 7, 11, 12, 13 und den primitiven Abscissen der neuen Cardinalpunkte, indem man ihre characteristischen Bedingungen einführt in eine der beiden Fundamentalgleichungen. Wir schreiben die Fundamentalgleichung 7 mit Berücksichtigung von Gl. 10 in der Form

$$As' + C = Bs + Dss', \qquad (16$$

wobei A und B wesentlich negative, C und D wesentlich positive Grössen sind; dann sind die beiden confocalen Punkte gegeben als conjugirte Punkte der beiden primitiven Coordinatenanfangspunkte, also (vergl. Fig. 5)

$$\left.\begin{aligned} s' = 0 \text{ entspricht } F_1\, C_\beta = \sigma = \frac{C}{B} \text{(negativ)}, \\ s = 0 \text{ entspricht } \Phi_\beta\, C_\alpha = \sigma' = -\frac{C}{A} \text{ (positiv)}. \end{aligned}\right\} \quad (17$$

Die primitiven Abscissen der Hauptpunkte ergeben sich ebenfalls aus den Fundamentalgleichungen und zwar einfach aus der Ordinatengleichung 14, indem man die Bedingung einführt, dass die beiden

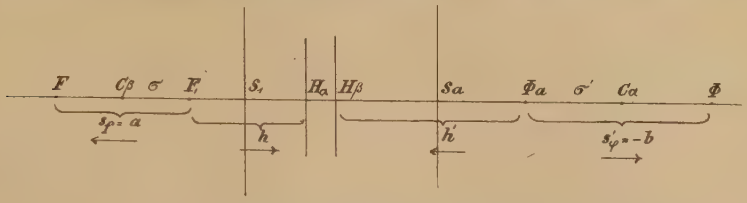

Fig. 5.

Hauptpunkte conjugirt sind, und zwar so, dass der eine das congruente und homothetische Bild des anderen ist, also $\frac{Y_0}{Y_1} = 1$. Demnach folgt aus Gl. 14 $A - s\,D = \Pi f$, also

$$F_1\, H_\alpha = h = \frac{A - \Pi f}{D} = a - \frac{\Pi f}{D} \text{ [nach (11)]}, \quad (18a$$

und aus Gl. 15 $B + Ds' = \Pi\varphi$, also

$$\Phi_\alpha\, H_\beta = h' = \frac{\Pi\varphi - B}{D} = \frac{\Pi\varphi}{D} - b \text{ [nach (11)]}. \quad (18b$$

Mit Hilfe der Gleichungen 17, 18 kann man nun die Hauptabscissen der confocalen Punkte ausdrücken (vergl. Fig. 6):

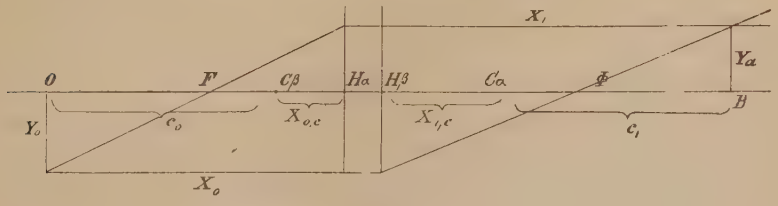

Fig. 6.

$$x_{0,c} = H_\alpha\, C_\beta = H_\alpha\, F_1 + F_1\, C_\beta = -h + \sigma = -a + \frac{\Pi f}{D} + \sigma; \quad (19a$$

$$x_{1,c} = H_\beta\, C_\alpha = H_\beta\, \Phi_\alpha' + \Phi_\alpha\, C_\alpha = -h' + \sigma' = b - \frac{\Pi\varphi}{D} + \sigma'. \quad (19b$$

Diese Werthe der Hauptabscissen der confocalen Punkte werden aber noch einfacher, wenn wir die ursprünglichen d. h. primitiven Abscissen der Brennpunkte des Systems berechnen. Dieselben ergeben sich aus der Fundamentalgleichung 16, indem wir die Bedingung

für diese Punkte einführen, nämlich erstens $s' = \infty$, und zweitens $s = -\infty$, dann folgt (vergl. Fig. 5)

$$\left.\begin{aligned} &1)\ A - Ds = \frac{Bs - C}{s' = \infty},\ \text{also}\ F_1 F = s_f = \frac{A}{D} = a\ (\text{negativ});\\ &2)\ \frac{B}{D} + s' = \left[\frac{A}{D}s' + \frac{C}{D}\right]\cdot\frac{1}{s = -\infty},\ \text{also}\ \Phi_a \Phi = s'\varphi = \\ &\qquad = \frac{-B}{D} = -b\ (\text{positiv}). \end{aligned}\right\} \quad (20$$

Jetzt lassen sich auch leicht die Brennweiten des Systems, f und φ bestimmen, nämlich sofort

$$\left.\begin{aligned} H_a F = f = H_a F_1 + F_1 F = -a + \frac{\Pi f}{D} + a = \frac{\Pi f}{D},\\ H_\beta \Phi = \varphi = H_\beta \Phi_a + \Phi_a \Phi = b - \frac{\Pi\varphi}{D} - b = -\frac{\Pi\varphi}{D}. \end{aligned}\right\} \quad (21$$

wenn man die Werthe der Grössen aus Gl. 18 und 20 einsetzt. Zur geometrischen Klarlegung wollen wir noch Gl. 21 einsetzen in Gl. 18, dann ist

$$h = F_1 F - H_a F;\ h' = \Phi H_\beta + \Phi_a \Phi\ [\text{vergl. Fig. 5}].$$

Wenn nun c_0 und c_1 die Abscissen conjugirter Punkte bezüglich der confocalen Punkte sind, so ist

$$x_0 = x_{0,c} + c_0;\quad x_1 = x_{1,c} + c_1$$

zu setzen in Gl. 3, so dass also die Abscissengleichung lautet

$$\frac{f}{x_{0,c} + c_0} + \frac{\varphi}{x_{1,c} + c_1} = 1.$$

Darin hat man aus Gl. 19 die Werthe für $x_{0,c}$ und $x_{1,c}$ einzusetzen. Genau dieselbe elegante und für weitere Schlüsse brauchbare Form nimmt auch diese Abscissengleichung an, wenn wir sie direct berechnen aus der allgemeinen Abscissengleichung 11. Nimmt man nämlich statt der Brennpunkte der beiden äussersten Diopter die confocalen Punkte als Abscissenanfangspunkte, so ist zu setzen in Gl. 11: $as' + c = bs + ss'$

$$c_0 = s - \sigma = s - \frac{C}{B};\quad c_1 = s' - \sigma' = s' + \frac{C}{A},$$

oder also

$$s = c_0 + \frac{C}{B};\quad s' = c_1 - \frac{C}{A}; \quad (21a$$

das gibt

$$a\left(c_1 - \frac{C}{A}\right) + c = b\left(c_0 + \frac{C}{B}\right) + \left(c_0 + \frac{C}{B}\right)\left(c_1 - \frac{C}{A}\right);$$

mit Berücksichtigung von Gl. 19 folgt dann sogleich

$$a c_1 - b c_0 = c_0 c_1 + c_1 \frac{c}{b} - c_0 \frac{c}{a} - \frac{c^2}{ab} + c,$$

oder

$$c_1 (ab - c) a + c_0 (c - ab) b = c_0 c_1 ab + c (ab - c).$$

Nun besteht die Beziehung

$$ab + f\varphi = c, \tag{22}$$

denn Gl. 14 und 15 ergeben

$$\frac{\Pi f \cdot \Pi \varphi}{D^2} = (a - s)(b + s') = ab - c = -f\varphi.$$

Dann folgt

$$-af\varphi c_1 + bf\varphi c_0 = c_0 c_1 ab - cf\varphi,$$

oder schliesslich die Abscissengleichung nimmt die Form an

$$\frac{-\frac{f\varphi}{b}}{c_0} + \frac{\frac{-f\varphi}{-a}}{c_1} = 1 - \frac{cf\varphi}{c_0 c_1 ab}. \tag{I}$$

Die beiden Ausdrücke in Zähler zu c_0 und c_1 links wollen wir noch etwas anders ausdrücken, um die Strecken geometrisch interpretiren zu können. Für die beiden conjugirten Punktepaare $F_1 C_\alpha$ und $\Phi_\alpha C_\beta$ lauten die Brennpunktsgleichungen nach Gl. 4 (vergl. Fig. 5)

$$-a \cdot \Phi C_\alpha = f\varphi; \quad b \cdot F C_\beta = f\varphi, \tag{23}$$

also unsere betrachteten Zähler sind die negativ genommenen Abscissen der confocalen Punkte bezüglich der Hauptbrennpunkte. Andrerseits folgt aus Gl. 19 und 21

$$\left.\begin{aligned} F C_\beta &= H_\alpha C_\beta - H_\alpha F = \sigma - a \\ \Phi C_\alpha &= H_\beta C_\alpha - H_\beta \Phi = \sigma' + b \end{aligned}\right\}. \tag{24}$$

Dann kann I in die Form gebracht werden

$$\frac{C_\beta F}{c_0} + \frac{C_\alpha \Phi}{c_1} = 1 - \frac{cf\varphi}{c_0 c_1 ab} = 1 - \frac{f\varphi}{c_0 c_1}\left(1 + \frac{f\varphi}{ab}\right), \tag{Ia}$$

oder

$$\frac{a - \sigma}{c_0} + \frac{-b - \sigma'}{c_1} = 1 - \frac{cf\varphi}{c_0 c_1 ab}.$$

Diese Gleichung der Abscissen bezüglich der confocalen Punkte stimmt in der Form überein mit der entsprechenden Gleichung bezogen auf die Hauptpunkte, Knotenpunkte und dioptrischen Punkte, freilich abgesehen von dem Summanden $-\frac{cf\varphi}{c_0 c_1 ab}$. Dass die schliessliche Abscissengleichung eine derartige Abweichung aufzeigen musste,

war vorauszusehen; denn die confocalen Punkte sind keine conjugirten Punkte, sondern nur Cardinalpunkte, d. h. Abscissenanfangspunkte, ebenso wie die Brennpunkte und die Augenpunkte. Gl. 3 gilt nur für conjugirte Punkte der Axe. Auch die allgemeine Abscissengleichung, welche wir nach Monoyer in der Form 7, 11, 16 geschrieben haben, lässt sich leicht in eine analoge Form bringen. Aus Gl. 16 erhalten wir nach Division durch Dss' mit Berücksichtigung von Gl. 10

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a}{s}+\frac{-b}{s'}=1-\frac{c}{ss'},\\ &\text{oder nach Gl. 22}\\ &\frac{F_1 F}{s}+\frac{\Phi_a \Phi}{s'}=1-\frac{c}{ss'}=1-\frac{ab+f\varphi}{ss'}. \end{aligned}\right\} \quad (16a$$

b) Die Ordinatengleichung.

Die Ordinatengleichung begüglich der confocalen Punkte erhalten wir, wenn wir in Gl. 14 und 15 für s und s' die Bedingung der confocalen Punkte einführen nach Gl. 21 a. Dann ist

$$\frac{Y_a}{Y_0}=\frac{\Pi f}{A-D\left(c_0+\frac{C}{B}\right)}=\frac{\left[B+D\left(c_1-\frac{C}{A}\right)\right](-1)^a}{\Pi\varphi}.$$

Setzen wir hierin die in Gl. 17 und 21 berechneten Werthe ein, so folgt

$$\left.\begin{aligned} \frac{Y_a}{Y_0}&=\frac{f}{a-\sigma-c_0}=\frac{b+\sigma'+c_1}{-\varphi}\\ &=\frac{f}{\frac{-f\varphi}{b}-c_0}=\frac{\frac{f\varphi}{-a}+c_1}{-\varphi}\ \text{nach Gl. 23}\\ &=\frac{f}{C_\beta F-c_0}=\frac{\Phi C_\alpha+c_1}{-\varphi}\ \text{nach Gl. 24.} \end{aligned}\right\} \quad (II$$

Dieselbe Beziehung ergiebt sich auch aus der Betrachtung der Fig. 6 aus ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken. Denn wir hätten auch, wie bei der Ableitung der Abscissengleichung schon angedeutet wurde (S. 714), ausgehen können von dem Gleichungssystem 1 und darin setzen

$$x_0=x_{0,c}+c_0;\qquad x_1=x_{1,c}+c_1;$$

denn diese Ordinatengleichung gilt auch für ein System von brechenden Flächen, wenn wir die Abscissen x_0 und x_1 statt von der Fläche von den beiden Hauptpunkten des Systems ab rechnen. Dann folgt

nach Gl. 19 und 21 ebenfalls II; zugleich ergeben sich dann aus Gl. 7 noch die Umformungen

$$\frac{Y_a}{Y_0} = \frac{c_1 + b + \sigma' - \frac{\Pi f'}{D}}{c_0 - a + \sigma + \frac{\Pi\varphi}{D}} = \frac{\Pi f\,(c_1 + b + \sigma' + \varphi)}{\Pi\varphi\,(c_0 - a + \sigma + f)}.$$

II. Die Coordinatengleichungen bezüglich der Augenpunkte.

a) Die Abscissengleichung.

Die Augenpunkte sind definirt als die conjugirten Punkte des Scheitelpunktes der ersten und letzten brechenden Fläche (S_1 und S_a); daher ergeben sich die primitiven Abscissen dieser Augenpunkte aus Gl. 16, und zwar

$$\Phi_a S_a = s' = -\varphi_a \text{ entspricht } F_1 A_\beta = \alpha;$$
$$F_1 S_1 = s = -f_1 \text{ entspricht } \Phi_a A_\alpha = \alpha';$$

also

$$\alpha = \frac{C - A\varphi_a}{B - D\varphi_a}; \quad \alpha' = \frac{-f_1 B - C}{A + D f_1}. \tag{26}$$

Dabei ist α wesentlich negativ, α' wesentlich positiv. Um auch diese Abscissen darzustellen durch die Grössen abc und die Constanten des Systems, benutzen wir Gl. 22 $ab + f\varphi = c$. Dann ist

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{c - a\varphi_a}{b - \varphi_a} = a + \frac{f\varphi}{b - \varphi_a} = F_1 F + F A_\beta; \\ \alpha' &= \frac{-f_1 b - c}{a + f_1} = -b + \frac{-f\varphi}{a + f_1} = \Phi_a \Phi + \Phi A_\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Hieraus erhalten wir leicht die Hauptabscissen dieser neuen Cardinalpunkte, nämlich es ist (vergl. Fig. 7):

$$\left.\begin{aligned} x_{0,\alpha} &= H_\alpha A_\beta = H_\alpha F_1 + F_1 A_\beta = -h + \alpha = f + \frac{f\varphi}{b - \varphi_a}; \\ x_{1,\alpha} &= H_\beta A_\alpha = H_\beta \Phi_a + \Phi_a A_\alpha = -h' + \alpha' = \varphi + \frac{-f\varphi}{a + f_1}. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Dann lautet die Abscissengleichung 2, wenn die neuen Abscissen mit a_0 und a_1 bezeichnet werden,

$$\frac{f}{x_{0,\alpha} + a_0} + \frac{\varphi}{x_{1,\alpha} + a_1} = 1, \tag{29}$$

da wir wiederum substituiren müssen in Gl. 2

$$x_0 = x_{0,\alpha} + a_0; \qquad x_1 = x_{1,\alpha} + a_1.$$

Um nun die Allgemeingiltigkeit der beiden S. 714 aufgestellten Methoden zur Ableitung der Coordinatengleichungen vollkommen dar-

zuthun, soll hier die dort angedeutete erste Methode durchgeführt werden und dann zur Verificirung dasselbe Resultat nach der zweiten Methode abgeleitet werden. Setzen wir Gl. 28 in Gl. 29 ein, so ergibt sich nach einfachen Umformungen

$$f\varphi = \frac{-f\varphi}{a+f_1}\cdot\frac{f\varphi}{b-\varphi_a} - a_0\frac{f\varphi}{a+f_1} + a_1\frac{f\varphi}{b-\varphi_a} + a_0 a_1, \qquad (30$$

oder

$$\frac{\frac{f\varphi}{a+f_1}}{a_1} + \frac{\frac{-f\varphi}{b-\varphi a}}{a_0} = 1 - \cdot 1 - \frac{f\varphi}{a_0 a_1}\left\{1 + \frac{f\varphi}{(a+f_1)\cdot(b-\varphi_a)}\right\}. \qquad (III$$

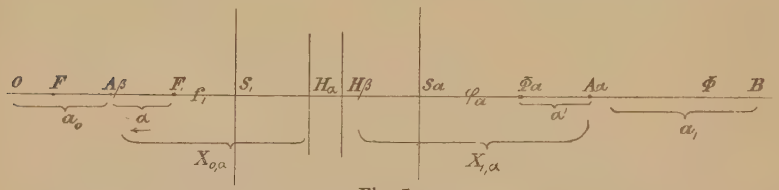

Fig. 7.

Diese Form der Abscissengleichung lässt sich leicht ebenso umformen, wie die entsprechende für die confocalen Punkte (I a S. 715). Die Brennpunktsgleichung der beiden conjugirten Punktpaare $S_1 A_\alpha$ und $S_\alpha A_\beta$ lautet

$$(-a-f_1)\cdot\Phi A_\alpha = f\varphi; \quad (b-\varphi_a)\cdot F A_\beta = f\varphi.$$

Dieselben Ausdrücke für FA_β und ΦA_α kann man auch geometrisch ableiten mit Hilfe von Gl. 27, nämlich

$$F_1 A_\beta = \alpha = F_1 F + F A_\beta,$$

da nun $F_1 F = a$, so folgt

$$F A_\beta = \frac{f\varphi}{b-\varphi_a} \text{ (positiv)};$$

ebenso, da $\Phi_\alpha \Phi = -b$ ist, folgt sofort

$$\Phi A_\alpha = \frac{-f\varphi}{a+f_1} \text{ (negativ)}.$$

Nun kann III geschrieben werden

$$\left.\begin{aligned} \frac{a-\alpha}{a_0} + \frac{-b-\alpha'}{a_1} &= 1 - \frac{f\varphi}{a_0 a_1}\left\{1 + \frac{f\varphi}{(a+f_1)\cdot(b-\varphi_a)}\right\}; \\ \frac{A_\beta F}{a_0} + \frac{A_\alpha \Phi}{a_1} &= 1 - \frac{f\varphi}{a_0 a_1}\left\{1 + \frac{f\varphi}{(a+f_1)\cdot(b-\varphi_a)}\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (IIIa$$

Zu demselben Resultate muss man auch gelangen von der allgemeinen Abscissengleichung, wie sie in Gl. 11 und 16 gegeben ist, ausgehend. Man erhält aus Gl. 11, wenn man die Bedingung der confocalen Punkte für s and s' einführt, es ist

$$a_0 = s - \alpha = s - a - \frac{f\varphi}{b - \varphi_a};\quad a_1 = s' - \alpha' = s' + b + \frac{f\varphi}{a + f_1},$$

$$s = a_0 + a + \frac{f\varphi}{b - \varphi_a};\quad s' = a_1 - b - \frac{f\varphi}{a + f_1}. \qquad (31$$

Wir setzen

$$\frac{f\varphi}{b - \varphi_a} = v;\quad \frac{f\varphi}{a + f_1} = u.$$

Dann folgt nach Gl. 22

$$f\varphi = a_0 a_1 + v a_1 - u a_0 - uv; \qquad (30a$$

zu derselben Form gelangten wir nach der ersten Methode in Gl. 30.

b) Die Ordinatengleichung.

Die Ordinatengleichung erhalten wir, wenn wir in Gl. 14 oder 15 für s und s' die Bedingung der Augenpunkte aus Gl. 31 einführen. Es ist

$$\frac{Y_a}{Y_0} = \frac{\Pi f}{A - D\left(a_0 + a + \frac{f\varphi}{b - \varphi_a}\right)} = \frac{B + D\left(a_1 - b - \frac{f\varphi}{a + f_1}\right)}{\Pi\varphi},$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{f}{-a_0 - \frac{f\varphi}{b - \varphi_a}} = \frac{a_1 - \frac{f\varphi}{a + f_1}}{-\varphi} \text{ nach Gl. 10,} \\ &= \frac{f}{A_\beta F - a_0} = \frac{a_1 + \Phi A_\alpha}{-\varphi} \text{ nach Gl. 27.} \end{aligned}\right\} \qquad (IV$$

Dasselbe Resultat lässt sich auch aus Fig. 7 ableiten aus ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken. Natürlich folgt es auch aus der fundamentalen Ordinatengleichung 1, wenn wir setzen

$$x_0 = x_{0,\alpha} + a_0;\quad x_1 = x_{1,\alpha} + a_1.$$

Nach Gl. 28 und 1 kann man dieses Bildgrössenverhältnis auch noch schreiben

$$\frac{Y_a}{Y_0} = \frac{a_1 - f + \frac{-f\varphi}{a + f_1}}{a_0 - \varphi + \frac{f\varphi}{b - \varphi_a}} = \frac{\Pi f\left(a_1 + \varphi + \frac{-f\varphi}{a + f_1}\right)}{\Pi\varphi\left(a_0 + f + \frac{f\varphi}{b - \varphi_a}\right)}.$$

Stellen wir nun die in diesem Paragraphen abgeleiteten Coordinatengleichungen zusammen, so erhalten wir für die confocalen Punkte:

$$\frac{C_\beta F}{c_0} + \frac{C_\alpha \Phi}{c_1} = 1 - \frac{f\varphi}{c_0 c_1}\left\{1 + \frac{f\varphi}{ab}\right\}; \qquad \text{(I}$$

$$\frac{Y_a}{Y_0} = \frac{f}{C_\beta F - c_0} = \frac{C_\alpha \Phi - c_1}{\varphi}; \qquad \text{(II}$$

für die Augenpunkte

$$\frac{A_\beta F}{a_0} + \frac{A_\alpha \Phi}{a_1} = 1 - \frac{f\varphi}{a_0 a_1}\left\{1 + \frac{f\varphi}{(a+f_1)(b-\varphi_a)}\right\}; \qquad \text{(III}$$

$$\frac{Y_a}{Y_0} = \frac{f}{A_\beta F - a_0} = \frac{A_\alpha \Phi - a_1}{\varphi}. \qquad \text{(IV}$$

Diese Gleichungen ergeben sofort das interessante Resultat: Die Coordinatengleichungen für Object und Bild bezüglich der confocalen Punkte und der Augenpunkte sind untereinander von genau derselben Form und zeigen eine ähnliche Form, wie die auf die Hauptpunkte bezogene entsprechende Gleichung. Der in der Abscissengleichung hinzutretende Summand

$$\frac{-f\varphi}{c_0 c_1}\left\{1 + \frac{f\varphi}{ab}\right\}, \text{ resp. } \frac{-f\varphi}{a_0 a_1}\left\{1 + \frac{f\varphi}{(a+f_1)(b-\varphi_a)}\right\}$$

enthält ausser dem Producte der Constanten des Systems $f \cdot \varphi$ und dem Producte der Abscissen conjugirter Punkte bezüglich der neuen Cardinalpunkte $c_0 c_1$, resp. $a_0 a_1$ noch die negativ genommenen Producte der Abscissen der Brennpunkte bezüglich der zu den entsprechenden Cardinalpunkten gehörenden conjugirten Punkte $a \cdot b$, resp. $(a + f_1) \cdot (b - \varphi_a)$.

Bei der Ableitung der Coordinatengleichungen bezüglich der neuen Cardinalpunkte standen uns zwei Wege offen. Wir konnten erstens die Bedingung der neuen Punkte einführen in die allgemeinen Gl. 1, 2 bezüglich der Hauptpunkte, indem wir die Beziehung entwickelten zwischen den Cardinalpunkten und den Hauptpunkten, und zweitens, wir konnten die Bedingung der neuen Punkte einführen in die Fundamentalgleichungen 16 oder 11; Gl. 14 und 15 bezüglich der Punkte $F_1 \Phi_a$, indem wir die Beziehung aufstellten zwischen den Cardinalpunkten und diesen primitiven Abscissenanfangspunkten. Für den Beweis der Brauchbarkeit beider Methoden haben wir je eine Ableitung vollkommen durchgeführt. Im Grunde besteht kein Unterschied zwischen den allgemeinen und fundamentalen Coordinatengleichungen.

Damit haben wir den ersten Theil unserer Aufgabe gelöst. Auf dem von Monoyer gezeigten und zuerst betretenen Wege sind wir

bis zu Ende fortgeschritten. Durch Einführung der Symbole A, B, C, D sind die allgemeinen Kettenbruchsreductionen auf eine elegante Form gebracht. Aber sehr umständlich ist die wirkliche Auswerthung dieser Grössen in praktischen Fällen. Euler, Gauss, Möbius u. A. hatten schon versucht, eine Darstellung der Näherungswerthe der Kettenbrüche im allgemeinen und namentlich der sogenannten, auch von uns benutzten dioptrischen Kettenbrüche in independenter Form zu geben. Aber der hauptsächlichste Vortheil lag immer nur in der übersichtlichen Form der verwandelten Resultate. Wir werden nun im zweiten Theile sehen, wie einfach sich die Resultate gestalten durch Einführung eines anderen combinatorischen Symbols, nämlich der Determinanten, und wir werden durch Benutzung der Interstitialdeterminante[1]) von Mathiessen eine ebenso elegante Form der Resultate erzielen können. Zum Schluss werden wir dann für specielle Lagen der Abscissenanfangspunkte auf der Axe die Gleichungen der Coordinaten von Object und Bild allein mit Hilfe dieser Function von Matthiessen darstellen und dabei elegante und wichtige Formeln für die afocalen Systeme erlangen.

Zweiter Teil.

Darstellung der Resultate mit Hülfe der Interstitialdeterminante.

§ 1.

Abscissengleichung von Object und Bild bezogen auf die confocalen Punkte.

Um allgemein die Abscissengleichung bezüglich der confocalen Punkte aufzustellen, haben wir die Constanten $x_{0,c}$ und $x_{1,c}$ für die confocalen Punkte zu bestimmen, nämlich

$$H_\alpha\, C_\beta = x_{0,c};\quad H_\beta\, C_\alpha = x_{1,c};\ \text{dabei ist}$$
$$H_\alpha\, C_\beta = H_\alpha\, S_1 + S_1\, C_\beta;\quad H_\beta\, C_\alpha = H_\beta\, S_\alpha + S_\alpha\, C_\alpha. \qquad (1$$

Wir berechnen zunächst die Abstände der beiden confocalen Punkte vom Scheitel der zunächst gelegenen Fläche, also $S_1\, C_\beta$ und $S\ C_\alpha$.

Um einen Ausdruck für $S_1\, C_\beta$ zu finden, construiren wir die Trajectorie des Lichtstrahles von Φ_α aus. (Fig. 8.) Wenn nun s_0 und s_1 die Abscissen des vorderen confocalen Punktes C_β und seines ersten Bildpunktes B_2 bezüglich der ersten brechenden Fläche S_1 bedeuten, analog s_k und s_{k+1} bezüglich S_k, dann lauten nach Gl. 2 die Abscissen-

---

1) Ueber das historische Moment der Entdeckung und Einführung dieser Function. Vergl. S. 728. Dadurch wird auch die Bemerkung von H. Brockmann in „Beiträge zur Dioptrik etc.“ Rostocker Dissertation (1887) S. 3, 4 berichtigt.

gleichungen für die einzelnen brechenden Flächen, da $f_a = \infty$; $\varphi_{a-1} = \infty$, $s_{2a-1} = \varphi_a$, $s_{2a-4} = f_{a-1}$,

$$\frac{f_{a-2}}{s_{2a-6}} + \frac{\varphi_{a-2}}{s_{2a-5}} = 1; \quad \ldots \quad \frac{f_1}{S_1 C_\beta} + \frac{\varphi_1}{s_1} = 1 \qquad (2$$

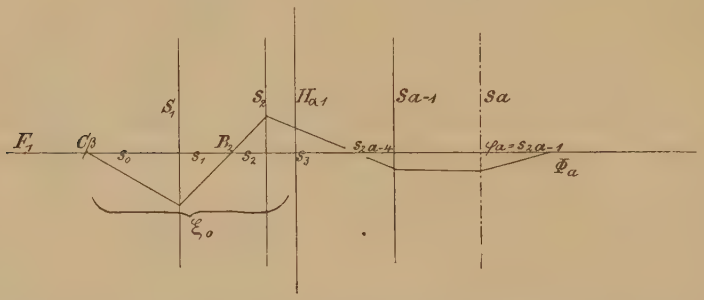

Fig. 8.

Es ist daher C_β der vordere Hauptbrennpunkt eines Systems von $a-1$ Flächen, nämlich der Flächen $S_1 \cdots S_{a-1}$. Für dieses System lässt sich leicht die Aufgabe lösen $S_1 C_\beta$ darzustellen als Kettenbruch in Determinantenform, indem wir, genau wie S. 709, alle Zwischenabscissen $s_1 \cdots s_{2a-4}$ eliminiren mit Hilfe von Gl. 2, und darauf nach S. 709 das secundäre Focalinterstitium $J_k = d_k - \varphi_k + f_{k+1}$ einführen, nämlich

$$S_1 C_\beta = f_1 + f_1 \varphi_1 / J_1 + f_2 \varphi_2 / J_2 + \ldots f_{a-2} \varphi_{a-2} / J_{a-2} \qquad (3$$

Für diesen dioptrischen Kettenbruch lässt sich der independente Ausdruck aufstellen

$$S_1 C_\beta = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & f_1\varphi_1 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ -1 & J_1 & f_2\varphi_2 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & -1 & J_2 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & -1 & . & . & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & f_r\varphi_r & 0 & . & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & J_r & f_{r+1}\varphi_{r+1} & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & f_{a-2}\varphi_{a-2} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & J_{a-2} & \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & J_1 & f_2\varphi_2 & . & 0 & 0 & . & 0 \\ 0 & -1 & J_2 & . & 0 & 0 & . & 0 \end{vmatrix}} \qquad (4$$

u. s. f. wie die fünf letzten Reihen im Zähler.

Bezeichnen[1]) wir nun nach Ferraris[2]) und Matthiessen[3]) den

1) Es ist dies die von Günther eingeführte Normalform der Kettenbruchsdeterminante in „Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form". Bd. 1 S. 32—34. In § 10 S. 39—40 wird daselbst der Beweis für die obige Umformung des Kettenbruches 3 in die Determinante 4 gegeben.

2) Ferraris, Sui Cannochiali etc. Turin (1880).

3) Allgemeine Formeln etc. Zeitschr. für Math. Bd. 29 (1884) S. 345. Vergl. übrigens S. 728.

$$\begin{vmatrix} J_1 & \varphi_2 & 0 & . & 0 \\ -f_2 & J_2 & \varphi_3 & . & 0 \\ 0 & -f_3 & J_3 & . & 0 \\ . & . & . & . & \varphi_{a-1} \\ 0 & 0 & 0 & -f_{a-1} & J_{a-1} \end{vmatrix} = R_{a-1} \qquad (5$$

Ausdruck als Interstitialdeterminante, so erkennen wir sofort durch symmetrische Vertauschung der Nachbarglieder der Diagonalreihe, dass die Nennerfunction von $S_1\ C_\beta$ in Gl. *4* als abgeleitete Interstitialdeterminante angesehen werden kann, nämlich als

$$\frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}} = R_{a-2}. \qquad (5a$$

Dann ergiebt sich aus Gl. *4* durch Zerlegen der Determinante

$$S_1 C_\beta = \frac{f_1 R_{a-2} + f_1 \varphi_1 \frac{\delta R_{a-2}}{\delta J_1}}{R_{a-2}} \qquad (6$$

Eine analog durchgeführte Rechnung für C_α als hinterer confocaler Punkt, als Hauptbrennpunkt eines Systems von a—1 brechenden Flächen, nämlich der Flächen $S_2\ S_3 \cdots S_a$, ergiebt bei derselben Bezeichungsweise

$$S_a C_\alpha = \frac{\varphi_a \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1} - f_a \varphi_a \frac{\delta R_{a-2}}{\delta J_1}}{\frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1}} \qquad (7$$

Um die Hauptabscissen der confocalen Punkte darzustellen, müssen wir jetzt noch, wie in Gl. *1* angegeben ist, die Hauptpunktsdistanzen berechnen. Es ist

$$H_\alpha S_1 = f - S_1 F; \quad H_\beta S_\alpha = \varphi - S_\alpha \Phi \qquad (8$$

Für zwei conjugirte Punkte auf der Axe gilt die Abscissengleichung bezüglich der Hauptpunkte nach Gl. 2

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1$$

in einem System von m brechenden Flächen. Dann lässt sich durch einige geometrische Schlüsse die Grunert'sche [1]) Gleichung folgern

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{s_0 \cdot s_2 \cdot s_4 \cdot \cdots \cdot s_{2m-2}}{s_1 \cdot s_3 \cdot s_5 \qquad s_{2m-1}}. \qquad (9$$

Rückt nun der leuchtende Punkt (Fig. 8) in den Punkt C_β, so wird

$$x_0 = \xi_0,\ s_0 = S_1 C_\beta;$$
$$x_1 = s_{2m-1} = s_{2a-3} = \infty\ ;$$

1) Optische Unters. Leipzig (1846). Grunert's Arch. Bd. 47 (1867).

denn nach S. 722 ist $m = a - 1$ zu setzen. Wir erhalten

$$\xi_0 = S_1 C_\beta \cdot \frac{s_2 \cdot s_4 \ldots s_{2a-4}}{s_1 \cdot s_3 \ldots s_{2a-5}}, \qquad (10$$

oder nach Gl. 2_a S. 709

$$\xi_0 = S_1 C_\beta \cdot \frac{s_2 \cdot s_4 \ldots s_{2a-4}}{(s_2 + d_1)\cdot(s_4 + d_2)\ldots(s_{2a-4} + d_{a-2})}.$$

Rückt umgekehrt der leuchtende Punkt in den Punkt C_α (Fig. 9), so ist

$$x_1 = \xi_1,\ s_{2m-1} = S_a C_\alpha$$
$$x_0 = s_2 = \infty,$$

denn es ist schon gezeigt, dass C_α aufgefasst werden kann als hinterer Hauptbrennpunkt eines Systems von nur a—1 brechenden Flächen.

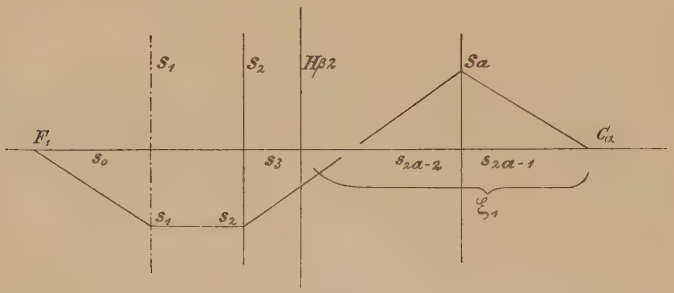

Fig. 9.

Daher

$$\xi_1 = S_a C_\alpha \cdot \frac{s_3 \cdot s_5 \ldots s_{2a-3}}{s_4 \cdot s_6 \ldots s_{2a-2}} \qquad (11$$

$$= S_a C_\alpha \cdot \frac{s_3 \cdot s_5 \ldots s_{2a-3}}{(s_3 - d_2)\cdot(s_5 - d_3)\ldots(s_{2a-3} - d_{a-1})}.$$

Da es für die weitere Rechnung nicht von Bedeutung ist, so haben wir in Gl. *10* und *11* die an sich verschiedenen Abscissen mit demselben Buchstaben s bezeichnet. Wir versuchen jetzt die einzelnen Grössen in Gl. *10* und *11* durch Interstitialkettenbrüche, resp. Interstitialdeterminanten auszudrücken. Die Beziehung der Grössen haben wir schon S. 709 abgeleitet aus den Scheitelpunktsgleichungen der einzelnen brechenden Flächen. Es war gefunden

$$S_1 C_\beta = f_1\{1 + \varphi\sqrt{J_1} + f_2\varphi_2\sqrt{J_2} + \ldots f_{a-2}\varphi_{a-2}\sqrt{J_{a-2}}\}, \qquad (3a$$

oder

$$= f_1 \begin{vmatrix} 1 & \varphi_1 & 0 & . & 0 \\ -1 & J_1 & \varphi_2 & . & 0 \\ 0 & -f_2 & J_2 & . & 0 \\ . & . & . & . & \varphi_{a-2} \\ 0 & 0 & . & -f_{a-2} & J_{a-2} \end{vmatrix} : R_{a-2} = \frac{f_1}{R_{a-}} \cdot U_1.$$

Ferner hatten wir nach S. 709

$$s_2 = f_2\left(1 + \frac{\varphi_2}{d_2 - \varphi_2 + s_1}\right);$$

ersetzen wir der Reihe nach die s_{2k} durch s_k, so ist nach den Günther'schen Sätzen über die Umwandlung der Kettenbrüche in Determinanten[1])

$$s_2 = f_2 \begin{vmatrix} 1 & \varphi_2 & 0 & . & 0 \\ -1 & J_2 & \varphi_3 & . & 0 \\ 0 & -f_3 & J_3 & . & 0 \\ . & . & . & . & \varphi_{a-2} \\ 0 & 0 & 0 & -f_{a-2} & J_{a-2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ -1 & J_2 & . & 0 \\ 0 & -f_3 & . & 0 \\ . & . & . & \varphi_{a-2} \\ 0 & 0 & f_{a-2} & J_{a-2} \end{vmatrix};$$

also $s_2 = \dfrac{f_2}{\dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1}} \cdot U_2$. Ebenso folgt leicht

$$s_2 + d_1 = f_2 + d_1 + \frac{f_2 \varphi_2}{d_2 - \varphi_2 + s_1} =$$

$$= \begin{vmatrix} f_2 + d_1 & \varphi_2 & . & 0 \\ -f_2 & J_2 & . & 0 \\ . & . & . & \varphi_{a-2} \\ 0 & 0 & -f_{a-2} & J_{a-2} \end{vmatrix} : \frac{\delta R_{a-2}}{\delta J_1}.$$

Daher ist

$$\frac{s_2}{s_2 + d_1} = \frac{f_2 U_2}{U_1}; \text{ ebenso } \frac{s_4}{s_4 + d_2} = \frac{f_3 U_3}{U_2}; \ldots$$

und schliesslich

$$\frac{s_{2a-4}}{s_{2a-4} + d_{a-2}} = \frac{f_{a-1} U_{a-1}}{U_{a-2}} = \frac{f_{a-1}}{\dfrac{U_{a-2}}{}};$$

denn die Scheitelpunktsgleichung der a—1ten Fläche lautet

$$\frac{f_{a-1}}{s_{2a-4}} + \frac{\varphi_{a-1}}{s_{2a-3}} = 1,$$

woraus folgt, da $s_{2a-3} = \infty$,

$s_{2a-4} = f_{a-1}$, also $U_{a-2} = \varphi_{a-2} + J_{a-2} = d_{a-2} + s_{2a-4}$.

Setzen wir diese Werthe für die Partialbrüche in Gl. *10* und *11* ein, so ergibt sich

$$\xi_0 = \frac{f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_{a-1}}{R_{a-2}}. \qquad (12$$

$$\xi_1 = \frac{\varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdot \varphi_4 \cdots \varphi_a (-1)^{a-2}}{R_{a-2}}. \qquad (13$$

Bleiben wir zunächst bei den beiden Systemen von je a—1 Flächen stehen und integriren dieselben ganz (Fig. 10). Aus Gl. *12* ergibt sich sofort die hintere Brennweite des Systems der Flächen $S_1\, S_2 \cdots S_{a-1}$

$$\varphi_{-1} = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_{a-1} (-1)^{a-2}}{R_{a-2}}; \qquad (13a$$

1) Vergl. S. 722, 723.

das Vorzeichen ist bestimmt durch $(-1)^{\alpha-2}$ mit Rücksicht darauf, dass immer sein muss $\varphi = -nf$.

Tritt nun zu diesem System die brechende Fläche S_a hinzu, so nennen wir die Combination dieser beiden Systeme ein wachsendes System. Von beiden kennen wir die Fundamentalpunkte, die Hauptpunkte und die Brennpunkte. Denn die partiellen Brennweiten der

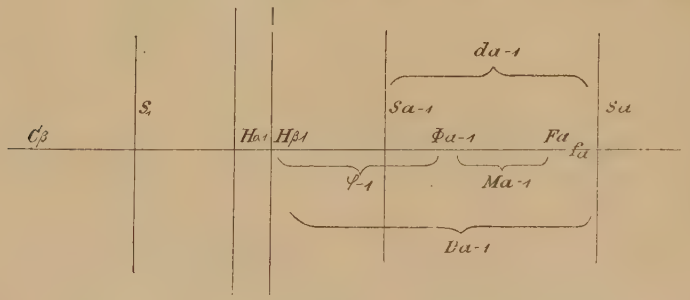

Fig. 10.

brechenden Fläche S_a sind gegeben als Elemente, und die beiden partiellen Hauptpunkte fallen in sich und mit dem Scheitelpunkt von S_a zusammen; für die Fläche S_a ist $F_a\ \Phi_a$ das Focalinterstitium und $H_a\ H_\beta = 0$ das Hauptpunktsinterstitium. Wir können dann berechnen und durch die Interstitialdeterminante ausdrücken[1])

1. das secundäre Focalinterstitium des wachsenden Systems

$$M_{a-1} = \frac{R_{a-1}}{R_{a-2}}, \qquad (14$$

2. das secundäre Hauptpunktsinterstitium

$$D_{a-1} = \frac{\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdots \varphi_{a-1}\,(-1)^{a-2}}{R_{a-2}} - f_a + \frac{R_{a-1}}{R_{a-2}}, \qquad (15$$

3. die zweite Hauptpunktsdistanz des wachsenden Systems α_{2a-2} (Fig. 11), die Entfernung des zweiten Hauptpunktes H_β des wachsenden

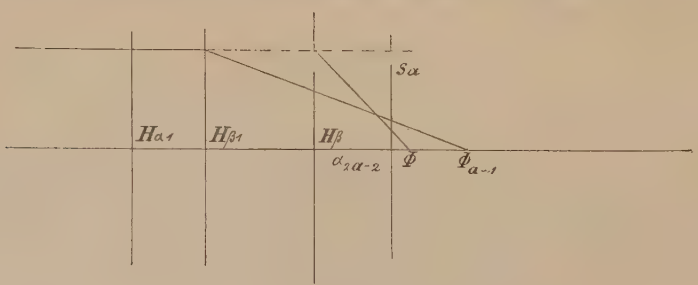

Fig. 11.

1) Nach Matthiessen: Zeitschrift für Mathematik. Bd. 29 (1884) und zum Teil Pflüger's Archiv. Bd. 19 (1879).

Systems vom Hauptpunkte S_a des nachfolgenden Systems

$$\alpha_{2a-2} = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_a (-1)^{a-1}}{R_{a-1}} + f_a \varphi_a \frac{R_{a-2}}{R_{a-1}} - \varphi_a. \qquad (16$$

Somit erhalten wir die Hauptabscisse des hinteren confocalen Punktes C_α (vergl. Gl. 19b und *1* nach Gl. *16* und *7*).

$$x_{1,c} = H_\beta C_\alpha = H_\beta S_a + S_a C_\alpha = \frac{\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_a (-1)^{a-1}}{R_{a-1}} +$$

$$+ f_a \varphi_a \frac{R_{a-2}}{R_{a-1}} - \frac{f_a \varphi_a \frac{\delta R_{a-2}}{\delta J_1}}{\frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1}}. \qquad (17$$

Analoge Betrachtungen und Rechnungen ergeben die Hauptabscisse des vorderen confocalen Punktes C_β. Man betrachtet das wachsende System $S_2 S_3 \cdots S_a$ und S_1 [1]), welche einzeln integrirt sind (vergl. Gl. *13*). So erhält man

$$x_{0,c} = H_\alpha C_\beta + H_\alpha S_1 + S_1 C_\beta = \frac{f_1 f_2 \cdots f_a}{R_{a-1}} - \frac{f_1 \varphi_1}{R_{a-1}} \cdot \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1} +$$

$$+ \frac{f_1 \varphi_1 \frac{\delta R_{a-2}}{\delta J_1}}{R_{a-2}}. \qquad (18$$

Bei der Berechnung dieser beiden Hauptabscissen haben wir den Umweg über M_{a-1} und D_{a-1} eingeschlagen, um consequent die Zerlegung des Systems von a-Flächen in zwei wachsende Systeme durchzuführen. Wir haben diese Hauptabscissen ausgedrückt durch eine Function, welche ausser den Constanten des Systems nur noch die Interstitialdeterminante enthält. Um nun die Coordinatengleichungen für Object und Bild bezüglich dieser Punkte aufzustellen, müssten wir zunächst nach der im ersten Theil, Gl. 21', angegebenen und Gl. 29, 30 I durchgeführten Methode verfahren. Wir wollen aber, da unsere Ausdrücke für $x_{0,c}$ und $x_{1,c}$ schwerfällig erscheinen, versuchen, Beziehungen aufzufinden zwischen der Interstitialdeterminante mit ihren Ableitungen einerseits und den Grössen, mit deren Hilfe Monoyer so einfache Formen der Fundamentalgleichungen gefunden hat, andrerseits, um diese Werte dann einsetzen zu können in I, II, III, IV.

Aus Gl. *12* ergibt sich durch einige Ueberlegung sofort

$$f = \frac{f_1 f_2 \cdots f_a}{R_{a-1}}, \qquad (12a$$

1) Matthiessen, Allgemeine Formeln etc. daselbst vergl. Gl. 23 u. 24.

dann folgt durch Combination dieses Ausdruckes mit Gl. 21

$$R_{a-1} = D.$$

Bilden wir nun R_{a-1} und die Ableitungen dieser Determinante nach J_1, J_{a-1} und J_1 und J_{a-1} etwa für die Werthe $a = 1$ bis $a = 5$, so erhalten wir die Werthe des Gleichungssystems, Gl. 8a, so dass wir, wenn wir von dem Symbol in Gl. $5a$ absehen, haben

$$\frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1} = A'; \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}} = B'; \frac{\delta^2 R_{a-1}}{\delta J_1 \cdot \delta J_{a-1}} = C', \text{ und } R_{a-1} = D. \quad (19$$

Es ist dies ein sehr interessantes Resultat. Man erkennt den innigen Zusammenhang zwischen den Coefficienten der Fundamentalgleichungen, und das im höchsten Grade sonderbare und umständliche, ja unwissenschaftliche System, Gl. 9, nimmt diese leicht verständliche, höchst einfache und übersichtliche elegante Form an. Es ist das Schicksal mancher Entdeckungen, wie jeder Abschnitt der Geschichte der Wissenschaften darthut, dass sie früher oder später nachentdeckt werden. Man muss sagen, das Bedürfnis der Entdeckung sei vorhanden. So ist es auch hier für das Formale auf dem Gebiete der Dioptrik. Matthiessen[1]) gab zuerst eine Interstitialdeterminante M_{a-1}, welche sich in der Form (vergl. Gl. *14*) $R_{a-1} : R_{a-2}$ darstellt. Ferraris[2]) hat ein Jahr später die Interstitialdeterminante R_{a-1} und ihre ersten partiellen Differentialquotienten verwerthet, um alle andern dioptrischen Strecken darzustellen. Monoyer ist unabhängig, wie es scheint, aber nicht nur später, sondern auch, wie eine Vergleichung von Gl. *19* mit Gl. 9 zeigt, zu einer bei Weitem nicht so klaren Einsicht in den Zusammenhang der Grössen A', B', C' mit D gekommen.

Das Gleichungssystem, Gl. 10, ergibt

$$\left.\begin{aligned} \frac{f_1 \varphi_1}{R_{a-1}} \cdot \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1} = \frac{A}{D} = a; \frac{f_a \varphi_a}{R_{a-1}} \cdot \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}} = \frac{B}{D} = b; \\ \frac{f_1 \varphi_1 f_a \varphi_a}{R_{a-1}} \cdot \frac{\delta^2 R_{a-1}}{\delta J_1 \delta J_{a-1}} = \frac{C}{D} = c. \end{aligned}\right\} \quad (20$$

1) Differentialgleichungen der Dioptrik etc. Pflüger's Archiv für die ges. Physiol. Bd. 19 (1879) S. 484; Schlömilch's Zeitschrift Bd. 24 (1879) S. 305.

2) Sui cannochiali con abbiettivo composto di piu lenti a distanza le une delle altre. Turin (1880). Ferraris wandte diese Function nur auf Linsensysteme in Luft an. Matthiessen, „Allgemeine Formeln zur Bestimmung der Cardinalpunkte“ etc. Zeitschrift für Math. u. Phys. Bd. 29 (1884) S. 343, hat dann weiter (1884) die Ferraris'schen Symbole für Gauss'sche Systeme verallgemeinert.

Mit Hilfe dieses Gleichungssystems folgt leicht die Uebereinstimmung der Gleichungen *18* und *17* mit den Gleichungen 19a und 19b, denn es wird

$$x_{0,c} = f - a + \frac{C}{B} = \text{Gl. 19a}; \qquad (18$$

$$x_{1,c} = \varphi + b - \frac{C}{A} = \text{Gl. 19b}. \qquad (17$$

Wir erhalten nun die Coordinatengleichungen bezüglich der confocalen Punkte lediglich als Function von R_{a-1} durch die einfachsten Einsetzungen:

$$\frac{-f\varphi}{f_a\varphi_a}\cdot\frac{R_{a-1}}{\dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}}} + \frac{f\varphi}{f_1\varphi_1}\cdot\frac{R_{a-1}}{\dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1}} = 1 - \qquad (I$$

$$-\frac{f\varphi}{c_0 c_1}\left[1 + \frac{f\varphi\,(R_{a-1})^2}{f_1\varphi_1 f_a\varphi_a \dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1}\cdot\dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}}}\right];$$

$$\frac{Y_a}{Y_0} = \frac{f}{\dfrac{f_1\varphi_1\dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1}}{R_{a-1}} - \dfrac{f_1\varphi_1\dfrac{\delta^2 R_{a-1}}{\delta J_1\cdot\delta J_{a-1}}}{R_{a-2}} - c_0} = \qquad (II$$

$$= -f_a\varphi_a\frac{R_{a-2}}{R_{a-1}} + f_a\varphi_a\frac{\dfrac{\delta^2 R_{a-1}}{\delta J_1\,\delta J_{a-1}}}{\dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1}} - c_1$$

$$\varphi\qquad\qquad;$$

und ebenso für die Augenpunkte

$$\frac{-f\varphi:\left(\dfrac{f_a\varphi_a}{R_{a-1}}\cdot\dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}} - \varphi_a\right)}{a_0} + \frac{f\varphi:\left(\dfrac{f_1\varphi_1}{R_{a-1}}\cdot\dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1} + f_1\right)}{a_1} = \qquad (III$$

$$= 1 - \frac{f\varphi}{a_{\nu} a_1}\left[1 + \frac{f\varphi}{\left(\frac{f_1\varphi_1}{R_{a-1}} \cdot \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1} + f_1\right) \cdot \left(\frac{f_a\varphi_a}{R_{a-1}} \cdot \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}} - \varphi_a\right)}\right];$$

$$\frac{Y_a}{Y_0} = \frac{f}{-\frac{f\varphi}{\frac{f_a\varphi_a}{R_{a-1}} \cdot \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}} - \varphi_a} - a_0} = \frac{-\frac{f\varphi}{\frac{f_1\varphi_1}{R_{a-1}} \cdot \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1} + f_1} + a_1}{-\varphi}. \quad (IV$$

Diese Coordinatengleichungen für Object und Bild bezüglich der neuen Cardinalpunkte, in welchen noch leicht f und φ durch die gegebenen Elemente des Systems ersetzt werden kann, erscheinen in der Form der Darstellung höchst ausgedehnt. Aber schon eine ganz oberflächliche Betrachtung zeigt, dass sie an Einfachheit und Symmetrie nichts zu wünschen übrig lassen und daher für die numerische Auswerthung von grosser Bedeutung sind; denn ausser den constanten Elementen des Systems enthalten diese Gleichungen nur die Interstitialdeterminante mit deren einfachsten Abgeleiteten. Diese Functionen sind mit leichter Mühe zu bilden. Wir unterlassen es daher, den Gleichungen einfachere Formen zu geben; es fehlt ja leider der Dioptrik noch eine Grundlage einer allgemein übereinstimmenden wissenschaftlichen Bezeichungsweise ihrer Fundamentalgrössen.

Nach Aufdeckung der einfachen Beziehung zwischen den Monoyer'schen Grössen $A\ B\ C\ D$ und der Interstitialdeterminante mit ihren Abgeleiteten in Gl. *19* lassen sich sämmtliche Resultate, welche wir im ersten Theile der Arbeit nach der Methode Monoyer's gefunden haben, sofort in neuer Form hinschreiben, z. B. die Fundamentalgleichung bezüglich der primitiven Abscissen Gl. 11 und 16a:

$$\frac{\frac{f_1\varphi_1}{R_{a-1}} \cdot \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1}}{s} + \frac{\frac{-f_a\varphi_a}{R_{a-1}} \cdot \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}}}{s'} = 1 - \frac{\frac{f_1\varphi_1 f_a\varphi_a}{R_{a-1}} \cdot \frac{\delta^2 R_{a-1}}{\delta J_1 \cdot \delta J_{a-1}}}{ss'}; \quad (21$$

die von Monoyer gegebene Form, Gl. 16, würde lauten

$$f_1\varphi_1 \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1} s' + f_1\varphi_1 f_a\varphi_a \frac{\delta^2 R_{a-1}}{\delta J_1 \delta J_{a-1}} = f_a\varphi_a \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}} s + R_{a-1} ss'. \quad (22$$

Dritter Theil.

Specialisirung der Lage der Cardinalpunkte auf der Axe. Afocale Systeme.

Unter gewissen Bedingungen ergibt die Abscissengleichung der confocalen Punkte *I* ein Analogon zur Hauptpunktsgleichung 3, wobei C_β (oder F_1) entspricht H_α, und C_α (oder Φ_a) entspricht H_β. Nehmen wir nämlich als primitive Abscissen der confocalen Punkte $\sigma = 0$ und $\sigma' = 0$, wofür die Bedingung lautet nach Gl. 17, dargestellt nach Gl. *20*

$$f_1 \varphi_1 f_a \varphi_a \frac{\delta^2 R_{a-1}}{\delta J_1 \delta J_{a-1}} = 0,$$

so erscheinen (vergl. Fig. 5 und Fig. 13) F_1 und Φ_a selber als wechselseitig conjugirte Cardinalpunkte. Aus der Fundamentalgleichung *21* folgt dann sofort

$$\frac{\frac{f_1 \varphi_1}{R_{a-1}} \cdot \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1}}{s} + \frac{\frac{-f_a \varphi_a}{R_{a-1}} \cdot \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}}}{s'} = 1.$$

Dasselbe Resultat folgt auch aus *I*, wenn wir setzen nach Monoyer'scher Weise $\sigma = 0$, $\sigma' = 0$, $c = 0$; dann ist ja $c_0 = s$; $c_1 = s'$. Beachten wir die Beziehung, welche für diesen Fall aus Gl. 22 folgt, $ab = -f\varphi$, so resultirt die Brennpunktsgleichung (vergl. Gl. 4)

$$f \varphi = s_f \cdot s'_\varphi$$

nach Gl. 20. Wenn man also zwei conjugirte Punkte zu Coordinatenanfangspunkten wählt, so ist

$$f = s_f = a = \frac{f_1 \varphi_1}{R_{a-1}} \cdot \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1}$$

$$\varphi = s'_\varphi = -b = \frac{-f_a \varphi_a}{R_{a-1}} \cdot \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}}.$$

Die Kettenbruchdarstellung ist also ausgedrückt durch bekannte Determinanten.

Wenn andrerseits F_1 zusammenfällt mit F, und Φ_a mit Φ, so liegen die confocalen Punkte beide im Unendlichen, denn jeder Brennpunkt hat sein Bild im Unendlichen. Als Bedingung dafür ergibt sich sofort (vergl. Fig. 5 und Gl. *20*)

$$f_1 \varphi_1 \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1} = 0; \text{ und } -f_a \varphi_a \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}} = 0.$$

Dasselbe Resultat folgt auch unmittelbar aus I. Dieser Fall tritt ein, wenn nur eine brechende Fläche vorgelegt ist.

So geeignet die Gleichungen *I* bis *IV* in ihrer ausgeschriebenen Form sich auch erweisen werden für Rechnungen, so bedarf es doch noch einer besonderen Untersuchung für afocale Systeme. Die Gleichungen enthalten die Constanten f und φ; da nun für solche afocale Systeme $f = -\infty$, $\varphi = \infty$ ist, so enthalten die Abscissengleichungen *I* und *III* Constanten von der Form $\frac{\infty}{\infty}$, und die Ordinatengleichungen *II* und *IV* werden selber $= \frac{\infty}{\infty}$.

Aus Gl. *12a* S. 727 folgt als Bedingung für afocale Systeme sofort $R_{a-1} = 0$. Das System hat keine Hauptbrennweiten mehr und folglich auch keine der in der Einleitung erwähnten Cardinalpunkte (vergl. Fig. 3). In diesem Falle bleiben aber die confocalen Punkte und die Augenpunkte und darin zeigt sich die Wichtigkeit der neu eingeführten Cardinalpunkte. Denn nach Gl. 17 liefert Gl. *22* reelle Abscissen dieser Punkte bezüglich der primitiven Coordinatenanfangspunkte für $R_{a-1} = 0$, nämlich

$$f_1 \varphi_1 \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1} s' + f_1 \varphi_1 f_a \varphi_a \frac{\delta^2 R_{a-1}}{\delta J_1 \delta J_{a-1}} = f_a \varphi_a \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}} s,$$

oder wenn wir durch den zweiten Summanden dividiren

$$\frac{\dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}}}{f_1 \varphi_1 \dfrac{\delta^2 R_{a-1}}{\delta J_1 \delta J_{a-1}}} s + \frac{\dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1}}{-f_a \varphi_a \dfrac{\delta^2 R_{a-1}}{\delta J_1 \delta J_{a-1}}} s' = 1.$$

Setzen wir nun

$$\frac{f_1 \varphi_1 \dfrac{\delta^2 R_{a-1}}{\delta J_1 \delta J_{a-1}}}{\dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}}} = F_1 C_\beta = \sigma, \quad \frac{-f_a \varphi_a \dfrac{\delta^2 R_{a-1}}{\delta J_1 \delta J_{a-1}}}{\dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1}} = \sigma' = \Phi_\alpha C_\alpha,$$

so lautet die gewünschte endliche Abscissengleichung

$$\frac{s}{\sigma} + \frac{s'}{\sigma'} = 1, \text{ oder } \frac{s}{F_1 C_\beta} + \frac{s'}{\Phi_a C_\alpha} = 1, \qquad (23$$

während die allgemeine Hauptpunktsgleichung lautet

$$\frac{H_\alpha F}{x_0} + \frac{H_\beta \Phi}{x_1} = 1.$$

Ebenso folgt leicht die Ordinatengleichung für afocale Systeme aus Gl. 14 und 15 für $R_{a-1} = 0$

$$\frac{Y_a}{Y_0} = \frac{f_2 \ldots f_a}{\varphi_1 \dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1}} = \frac{\pm f_a \dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}}}{\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_{a-1}}. \qquad (24$$

Diese Gleichung liefert für ein Linsensystem in Luft

$$\frac{Y_a}{Y_0} = \sqrt{\frac{f_a \varphi_a \dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}}}{f_1 \varphi_1 \dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1}}} = \text{const}^{1}).$$

So haben wir in Gl. *23* und *24* endliche Coordinatengleichungen aufgestellt, welche sofort der Rechnung zu Grunde gelegt werden können. Ausser den gegebenen Elementen kommen in den Gleichungen nur die Interstitialdeterminante und ihre partiellen Differentiale vor. Diese Gleichungen lassen sich noch weiter vereinfachen dadurch, dass wir als Anfangspunkte nehmen $F_1\, C_\alpha$, so dass die Cardinalpunkte zwei conjugirte Punkte der Axe sind. Für diesen Fall haben wir in Gl. *23* zu setzen (vergl. Fig. 5)

$$s' = \Phi_\alpha B = \Phi_\alpha C_\alpha + C_\alpha B = \sigma' + c_1'.$$

Dann lautet Gl. *23*

$$\frac{s}{\sigma} + \frac{c_1'}{\sigma'} = 0, \text{ oder } c_1 = \frac{-\sigma'}{\sigma} s = \text{const}\, s \text{ (Fig. 12).}$$

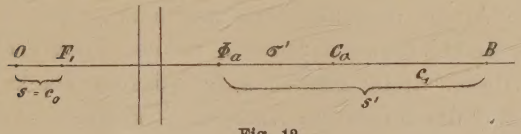

Fig. 12.

Wenn schliesslich in einem solchen afocalen Systeme noch die confocalen Punkte zusammenfallen mit F_1 resp. Φ_α, wenn also diese Punkte als wechselseitig conjugirte Punkte der Axe auftreten, dann lauten die primitiven Fundamentalgleichungen (vergl. Fig. 13)

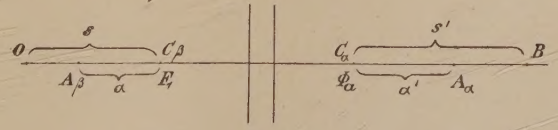

Fig. 13.

$$f_1 \varphi_1 \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1} s' = f_a \varphi_a \frac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}} s;\; s' = \frac{f_a \varphi_a \dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}}}{f_1 \varphi_1 \dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1}} s = s \cdot \text{const.}$$

1) Vergl. Gauss, Dioptrische Untersuchungen § 11.

Dann ist nach Gl. 26

$$\alpha = \frac{-f_1\varphi_1\dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1}}{f_a\varphi_a\dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}}}\cdot\varphi_a\,; \qquad \alpha' = \frac{-f_a\varphi_a\dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_{a-1}}}{f_1\varphi_1\dfrac{\delta R_{a-1}}{\delta J_1}}\cdot f_1,$$

also $\alpha\,\alpha' = f_1\,\varphi_a$; analog der Brennpunktsgleichung Gl. 4 und auch entsprechend der Brennpunktsgleichung S. 731.

Damit wollen wir unsere Untersuchungen abschliessen.

Das Willkürliche in der Annahme und Definition der neuen von Monoyer eingeführten Cardinalpunkte ist einleuchtend; principiell mit demselben Rechte hätten auch die partiellen Brennpunkte der anderen Flächen mit ihren conjugirten Punkten als primitive Abscissenanfangspunkte gewählt werden können; ja auch die Centren der einzelnen Flächen und deren conjugirte Punkte. Daher muss die Definition Monoyer's mangelhaft erscheinen. Aber in der glücklichen Wahl gerade dieser Cardinalpunkte liegt das unbestreitbare Verdienst Monoyer's. Gerade diese confocalen und Augenpunkte ergeben, wie durchgeführte Rechnungen zeigten, die Fundamentalgleichungen in der elementarsten und einfachsten Weise und sind auf afocale Systeme mit leichter Mühe anwendbar.

Vorliegende Arbeit verdankt ihre Entstehung der Anregung des Herrn Professor Matthiessen. Diesem, meinem hochverehrten Lehrer, spreche ich an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank aus für das rege Interesse und die fördernde Anregung, welche mir auch bei der Ausführung der Arbeit zu Theil geworden sind.